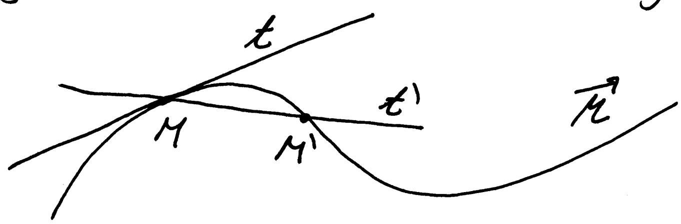
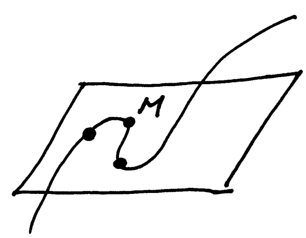
Normalna, oskulatorna i rektifikaciona ravan

Tangenta (dirka) na krivu $\vec{r}$ u tački M je prava $\vec{t}$ koja predstavlja granični položaj sječice MM' (vidi sliku) kada se druga tačka M' krive neograničeno približava tački M.



Normalna ravan prostorne krive u datoj tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i normalna je na tangentu krive u toj tački

Oskulatorna ravan u tački M krive $\vec{r}$ se može tumačiti kao ravan koja se dobije kao granični položaj promjenjive ravni koja prolazi kroz tri tačke krive, kada te tačke teže tački M.



Binormala prostorne krive $\vec{r}$ u tački M je prava normalna na oskulatornu ravan te krive u tački M.

Rektifikaciona ravan je ravan koja prolazi kroz tangentu i binormalu u datoj tački M prostorne krive.

#) Naći jedinične vektore tangente, normale i binormale za krivu

$$\vec{r} = (\cos t + \sin^2 t)\,\vec{i} + \sin t\,(1-\cos t)\,\vec{j} - \cos t\,\vec{k}$$

u tački A u kojoj je $t = \frac{\pi}{2}$ i napisati u istoj tački jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni.

Rj.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{t} = \dot{\vec{r}} & \text{vektor tangente} \\ \vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} & \text{vektor binormale} \\ \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} & \text{vektor normale} \end{array}}$$

Kako je $\dot{\vec{r}} = (-\sin t + 2\sin t\cos t,\ \cos t(1-\cos t) + \sin t \cdot \sin t,\ \sin t) = (-\sin t + \sin 2t,\ \cos t - \cos 2t,\ \sin t)$

$$\ddot{\vec{r}} = (-\cos t + 2\cos 2t,\ 2\sin 2t - \sin t,\ \cos t)$$

to je u tački A vektor u pravcu tangente

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = (-1, 1, 1)$$

a $\vec{t}_0 = \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

Vektor $\vec{b}$ u pravcu binormale u tački A je

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} \times \ddot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, 3)$$

dok je

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3).$$

Primjetimo $\vec{t} \perp \vec{b}$

Vektor $\vec{n}$ u pravcu normale je

Primijetimo
$\vec{n} \perp \vec{b}$
$\vec{n} \perp \vec{t}$

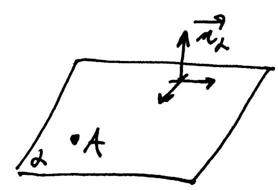
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -4, -1)$$

a $$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{42}} (-5, -4, -1)$$

Tačka A ima koordinate $A(\overset{x_1}{1}; \overset{y_1}{1}; \overset{z_1}{0})$

Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan, $M, \vec{b}$ i $\vec{n}$ normalnu ravan, a $M, \vec{b}$ i $\vec{t}$ rektifikacionu ravan krive u tački M krive.

$$\vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (3, -6, 9) = 3(1, -2, 3)$$ vektor normale na oskulatornu ravan



$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ jednačina ravni kroz tačku

$1 \cdot (x-1) - 2(y-1) + 3(z-0) = 0$

$x - 2y + 3z + 1 = 0$ jednačina oskulatorne ravni

$$\vec{b} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (14, -14, -14) = 14(1, -1, -1)$$

$1(x-1) - 1(y-1) - 1(z-0) = 0$

$x - y - z = 0$ jednačina normalne ravni

$$\vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -4, -1)$$

$-5(x-1) - 4(y-1) - 1(z-0) = 0$

$-5x - 4y - z + 9 = 0$ jednačina rektifikacione ravni

#) Naći jednačinu normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni krive $\vec{r}=(t^3-t^2-5,\ 3t^2+1,\ 2t^3-16)$ u tački $t=2$. U istoj tački odrediti jednačine tangente, binormale i glavne normale krive.

Rj. Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan.

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}}=(3t^2-2t,\ 6t,\ 6t^2),\quad \vec{t}_A=(8,12,24)=4(2,3,6)$$

Tačku na krivoj ćemo dobiti kad uvrstimo u jednačinu krive $t=2$; biće $A(-1,13,0)$.

$$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}}=(6t-2,\ 6,\ 12t),\quad \ddot{\vec{r}}\Big|_A=(10,6,24)=2(5,3,12)$$

$$\vec{b}_A=4\cdot 2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 6\\ 5 & 3 & 12\end{vmatrix}=8(18,6,-9)$$

$$\vec{b}_A=24(6,2,-3)$$

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}\qquad \vec{n}_A=24\cdot 4\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 6\end{vmatrix}=96(21,-42,14)$$

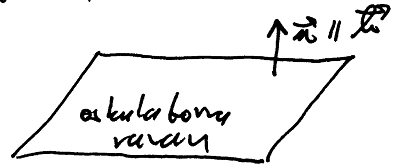
$$\vec{n}_A=96\cdot 7(3,-6,2)$$

Kako za jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni ne igra ulogu intenzitet već samo pravci vektora to ćemo uzeti da je

$$\vec{t}_A=(2,3,6)$$
$$\vec{b}_A=(6,2,-3)$$
$$\vec{n}_A=(3,-6,2)$$

Primjetimo da $\vec{t}\perp\vec{b}$, $\vec{t}\perp\vec{n}$ i $\vec{b}\perp\vec{n}$.

Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan



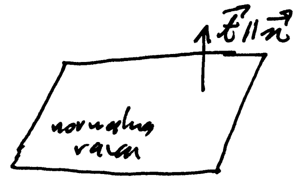
$A(-1, 13, 0)$, $\vec{b} = (6, 2, -3)$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

$$6(x+1) + 2(y-13) - 3(z-0) = 0$$

$$6x + 2y - 3z = 20$$ jednačina oskulatorne ravni

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{n}$ određuju normalnu ravan

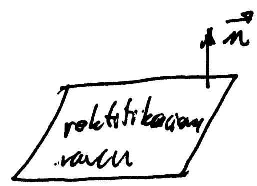


$\vec{t} = (2, 3, 6)$

$$2(x+1) + 3(y-13) + 6(z-0) = 0$$

$$2x + 3y + 6z = 37$$ jednačina normalne ravni

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{t}$ određuju rektifikacionu ravan



$\vec{n} = (3, -6, 2)$

$$3(x+1) - 6(y-13) + 2(z-0) = 0$$

$$3x - 6y + 2z = -81$$ jednačina rektifikacione ravni

$\vec{t} = (2, 3, 6)$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z-0}{6}$$ jednačina tangente

$\vec{b} = (6, 2, -3)$

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z-0}{-3}$$ jednačina binormale

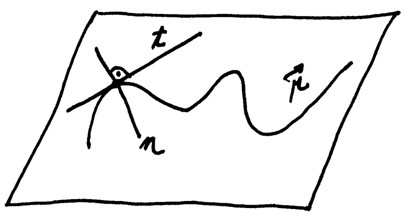
$\vec{n} = (3, -6, 2)$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-6} = \frac{z-0}{2}$$ jednačina glavne normale

(#) Pokazati da linija
$$x = at^2 + bt + c$$
$$y = a_1t^2 + b_1t + c_1$$
$$z = a_2t^2 + b_2t + c_2$$

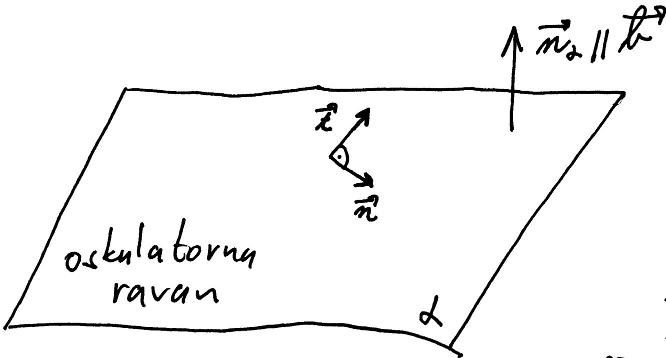
leži u jednoj ravni i naći jednačinu te ravni.

Rj: Posmatrajmo neku krivu $\vec{r}$ koja leži u ravni.



Da li tada i tangenta u svakoj tački krive leži u istoj ravni? Da li normala proizvoljne tačke krive pripada ravni?

Odgovor na oba pitanja je pozitivan. Znamo da t i n određuju oskulatornu ravan.
Šta znači kada je jednačina oskulatorne ravni u svim tačkama krive ista



znamo da je vektor normale na ravan paralelan sa vektorom binormale.

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

Znamo da je
$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$
jednačina ravni kroz jednu tačku pa je

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

jednačina oskulatorne ravni krive u tački $M(x_1; y_1; z_1)$

Iz linearne algebre znamo da $\begin{vmatrix} A & B & C \\ E+F & G+J & H+X \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & G & H \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C \\ F & J & X \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

Pa imamo

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 2at & 2a_1t & 2a_2t \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (objasniti zašto?)}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(at^2+bt+c) & y-(a_1t^2+b_1t+c_1) & z-(a_2t^2+b_2t+c_2) \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} -at^2 & -a_1t^2 & -a_2t^2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0} - \underbrace{\begin{vmatrix} bt & b_1t & b_2t \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} c & c_1 & c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

(objasniti zašto?)

Dobili smo da je jednačina oskulatorne ravni

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & c_1 & c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Iz zadnje jednačine se vidi da u njoj ne figuriše t, tj. oskulatorne ravni u svim tačkama krive se poklapaju, što znači da je kriva ravna.

Jednačina oskulatorne ravni ne zavisi od parametra t, ne zavisi od izbora tačke krive

Napomena:

Iz rješenja prethodnog zadatka možemo primjetiti da je za krivu $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

jednačina oskulatorne ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

$$\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1) + \dot{z}(z-z_1) = 0$$

jednačina normalne ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

$$\ddot{x}(x-x_1) + \ddot{y}(y-y_1) + \ddot{z}(z-z_1) = 0$$

jednačina rektifikacione ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

Odrediti jednačinu rektifikacione ravni krive $L: x^2=2z,\ y^2=2z$ u proizvoljnoj tački M_0 te krive.

Rj: Prisjetimo se

Jednačina rektifikacione ravni krive $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\ddot{x}(x-x_0)+\ddot{y}(y-y_0)+\ddot{z}(z-z_0)=0$$

(tačka M_0 te vektori $\vec{b}$ i $\vec{t}$ određuju rektifikacionu ravan krive)

Parametrizirajmo datu krivu

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2z \\ y^2&=2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow y=\pm x$$

Primjetimo da je $z=\frac{1}{2}x^2$

Ako sa t označimo x imamo $L: \begin{cases} x=t \\ y=\pm t \\ z=\frac{1}{2}t^2 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$\dot{x}=1 \qquad \ddot{x}=0$$
$$\dot{y}=\pm 1 \qquad \ddot{y}=0$$
$$\dot{z}=t \qquad \ddot{z}=1$$

Ako je $M_0\in L$ tada $M_0(t_0, \pm t_0, \frac{1}{2}t_0^2)$

Jednačina rektifikacione ravni u tački M_0 je $z-\frac{1}{2}t_0^2=0$.

Pokazati da normalne ravni krive

$$L: x = a\sin^2 t, \quad y = a\sin t\cos t, \quad z = a\cos t$$

prolaze kroz koordinatni početak.

Rj. Prisjetimo se

PITANJE: Kako glasi jednačina ravni koja prolazi kroz koordinatni početak?

Jednačina normalne ravni u nekoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ krive $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in I \end{cases}$ je $\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0.$

(tačka M_0 i vektor $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju normalnu ravan).

$$\dot{x} = 2a\sin t\cos t = a\sin 2t$$
$$\dot{y} = a\cos^2 t - a\sin^2 t = a\cos 2t$$
$$\dot{z} = -a\sin t$$

vektor tangente je $\vec{t} = (a\sin 2t,\ a\cos 2t,\ -a\sin t)$

Jednačina normalne ravni krive u proizvoljnoj tački ima oblik

$$a\sin 2t\,(x - a\sin^2 t) + a\cos 2t\,(y - a\sin t\cos t) - a\sin t\,(z - a\cos t) = 0 \quad /:a$$

$$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z + (-a)\sin^2 t\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t} + (-a)\sin t\cos t\underbrace{\cos 2t}_{(\cos^2 t - \sin^2 t)} + a\sin t\cos t = 0$$

$$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z + \overbrace{(-a)2\sin^2 t\sin t\cos t + a\sin^2 t\sin t\cos t}^{(-a)\sin^2 t\,\sin t\cos t}$$
$$+ (-a)\cos^2 t\sin t\cos t + a\sin t\cos t = 0$$

$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z = 0$

jednačina normalne ravni krive

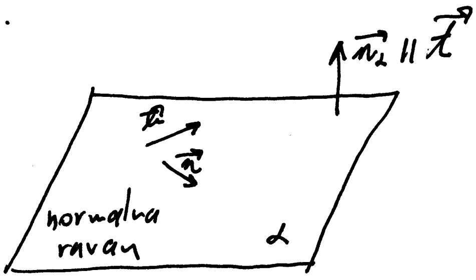
iz čega vidimo da ravan sadrži tačku $O(0,0,0)$.

(#) Dokazati da normalne ravni krive

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin\alpha \sin t \\ z = a\cos\alpha \sin t \end{cases}$$

prolaze kroz pravu $x=0$, $z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

Rj.



$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$

Jednačina normalne ravni u nekoj tački krive (x_1, y_1, z_1) je

$$\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1) + \dot{z}(z - z_1) = 0$$

$$\dot{x} = -a\sin t$$
$$\dot{y} = a\sin\alpha\cos t$$
$$\dot{z} = a\cos\alpha\cos t$$

Za krivu $\vec{r}$ jednačina normalne ravni je

$$-a\sin t(x - a\cos t) + a\sin\alpha\cos t \cdot (y - a\sin\alpha\sin t) + a\cos\alpha\cos t(z - a\cos\alpha\sin t) = 0 \quad /:a$$

tj.

$$(-\sin t)x + (\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z + a\sin t\cos t \underbrace{- a\sin^2\alpha\sin t\cos t - a\cos^2\alpha\sin t\cos t}_{= -a\sin t\cos t(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = 0$$

$$(-\sin t)x + (\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z = 0$$

jednačina normalne ravni krive

Naša (data) prava leži u yOz ravni.

Kako naći presjek neke ravni sa ravni $x=0$?

$x=0$ je yOz ravan.

Presjek normalne ravni krive sa ravni $x=0$ je

$$(\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z = 0 \quad /:\cos\alpha\cos t$$

$$z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$$

Prema tome normalne ravni krive $\vec{r}$ prolaze kroz pravu

Napomena:

U tačkama krive $\vec{r} = (a\cos t, a\sin\alpha\sin t, a\cos\alpha\sin t)$ u kojima je $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ normalna ravan se poklapa sa ravni $x = 0$.

Objasniti zašto?

U tačkama krive $\vec{r}$ u kojima je $t = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ normalna ravan je sama ravan $z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, što se lako vidi uvrste li se odgovarajuće vrijednosti za t u jednačinu normalne ravni.

(#) Data je kriva $x=\frac{1}{2}\sin^2 t$, $y=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)$, $z=\sin t$.

a) Odrediti jednačine tangente, binormale i glavne normale u proizvoljnoj tački.

b) Dokazati da svaka od pravih pod a) zaklapa sa z-osom konstantan ugao.

Rj:

a) $\vec{t}=\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{r}}=\left(\frac{1}{2}2\sin t\cos t, \frac{1}{2}(1+\cos^2 t-\sin^2 t), \cos t\right)$

$$=\left(\sin t\cos t, \frac{1}{2}(\cancel{\sin^2 t}+\cos^2 t+\cos^2 t-\cancel{\sin^2 t}), \cos t\right)$$

$$=(\sin t\cos t, \cos^2 t, \cos t)$$

Za $\vec{t}$ možemo uzeti $\vec{t}=(\sin t, \cos t, 1)$ vektor tangente

$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}=(\cos^2 t-\sin^2 t, -2\sin t\cos t, -\sin t)$

$$=(\cos 2t, -\sin 2t, -\sin t)$$

Kako je $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \cos 2t & -\sin 2t & -\sin t \end{vmatrix} = (-\sin t\cos t+\sin 2t, \sin^2 t+\cos 2t, -\sin t\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t}-\cos t\underbrace{\cos 2t}_{\substack{\cos^2 t-\sin^2 t \\ 1-\sin^2 t}}) =$

$$=(\sin t\cos t, \cos^2 t, -\cos t)$$

možemo uzeti $\vec{b}=(\sin t, \cos t, -1)$ vektor binormale

$\vec{n}\parallel\vec{b}\times\vec{t}$

$$\vec{b}\times\vec{t}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & \cos t & -1 \\ \sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix}=(2\cos t, -2\sin t, 0)$$

$$\vec{n}=(\cos t, -\sin t, 0)$$

t: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{\cos t}=\dfrac{z-\sin t}{1}$ jednačina tangente

b: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{\cos t}=\dfrac{z-\sin t}{-1}$ jednačina binormale

n: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{-\sin t}=\dfrac{z-\sin t}{0}$ jednačina normale

b) z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{p}_z,\vec{t})$, vektor tangente $\vec{t}=(\sin t,\cos t,1)$

$$\cos\gamma_t=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$ $\vec{p}\cdot\vec{t}=1$, $|\vec{p}|=1$,

$|\vec{t}|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$

$$\cos\gamma_t=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\gamma_t=\frac{\pi}{4}$$

vektor binormale $\vec{b}=(\sin t,\cos t,-1)$

$|\vec{b}|=\sqrt{2}$

$$\cos\gamma_b=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\gamma_b=\frac{3\pi}{4}$$

vektor normale $\vec{n}=(\cos t,-\sin t,0)$

$|\vec{n}|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+0}=1$

$$\cos\gamma_n=\frac{0}{1\cdot 1}=0\Rightarrow\gamma_n=\frac{\pi}{2}$$

Kriva L u prostoru se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I, \tag{1}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$L: \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \quad t \in I \tag{1'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $I \subset R$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

Kriva L može još biti zadata i na sledeće načine:

$$L: \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in I \tag{2}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$L: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(*implicitni oblik*).

Površ S ($S \subset \mathbb{R}^3$) se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \triangle \tag{4}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$S: \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \tag{4'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $\triangle$ dvodimenzionalni povezan skup u ravni uOv, a $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ su funkcije dve promenljive koje zadovoljavaju slične uslove kao što je spomenuto za funkcije date u (1).

Ostali oblici jednačina površi S:

$$S: z = z(x, y), (x, y) \in D \quad (D \subset xOy) \tag{5}$$

(*eksplicitni* oblik);